

微波网络和相对论中的 γ 因子

作者：何迟光 SKYASTAR TECHNOLOGIES CORP. (珠海思开达技术有限公司)

摘要：本文推导了 Einstein 相对论中的 γ 因子，提出了 LC 回路和传输线的 γ 因子。分析了这三个 γ 因子 γ_{Ein} 、 γ_{Lc} 和 γ_{Line} 的意义、共同点及其在工程中的应用。

关键词：LC 回路 传输线 γ 因子 γ_{Ein} 因子 γ_{Lc} 因子 γ_{Line} 因子 极点 第一区域 非第一区域

1. Einstein 相对论中的 γ 因子

为了简洁地推导出相对论中的 γ 因子，我建立了下面的模型。在地球和卫星之间有一束激光来回的反射，假设其周期是一秒。我们可以称为光时钟，如图 1.1 (a) 所示。如果从经过地球快速运动一艘宇宙飞船上观察这个光时钟。他会看到地球和卫星快速地经过他的宇宙飞船，因为他认为自己是静止的。如图 1.1 (b) 所示，他会观察到光信号沿着锯齿形路径传播，因为地球和卫星都在以速度 v 运动。地球表面与卫星之间的距离为 A ，在这个模型中为 0.5 光秒。激光束从地球运动到卫星这段时间内走过的路程为 C ，地球上的发射机和卫星在空间中走过的路程为 B 。

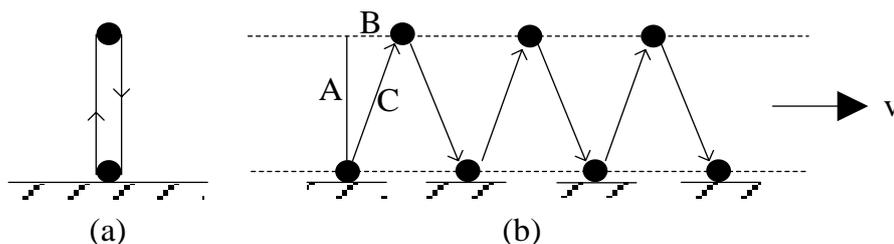


图 1.1 处于静止和运动的光时钟 (a) 一束激光信号从地球上的发射器发射到固定轨道中的卫星上，再从那儿反射回卫星，如此反复下去。 (b) 从经过的宇宙飞船看，光信号沿着锯齿形路径传播。两条虚线分别为卫星和发射器的轨迹

从地球系统来看，光信号用半秒走完距离 A ，而在宇宙飞船的系统中，却要走完距离 C 。根据相对论的基本假设，光速总是恒定的。距离的比值即时间的比值。我们得到时间的膨胀因子

$\gamma_{\text{Ein}} = \frac{C}{A}$ ，这就是相对论中的 γ 因子。

显然， $A^2 + B^2 = C^2$ ，我们可以得到，

$$\frac{C}{A} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{B}{C}\right)^2}}$$

B 与 C 是卫星和光信号在相同的时间跨度内走过的距离，因此距离之比应该等于速度之比，

$$\frac{B}{C} = \frac{v}{c}$$

所以相对论中的 γ 因子为 $\gamma_{Ein} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$ 。

显然， $\gamma_{Ein} \geq 1$ ，且随着速度 v 的增加， γ_{Ein} 是单调递增的。 $v=0$ ，其值为 1；在 $v=c$ ，其值达到无穷。光速 c 是 γ_{Ein} 的极点。

2. 微波网络中的 LC 回路和传输线

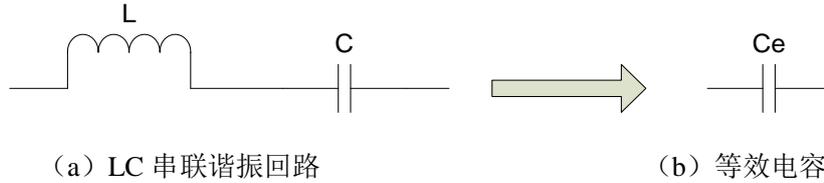
LC 回路和传输线是微波网络中的两种基本的单元电路。LC 回路分为 LC 串联谐振和并联谐振回路，传输线分为短路线和开路线。我以 LC 串联谐振回路和短路传输线为例推导了 γ 因子。

3. LC 回路的 γ 因子

在电感 L 和电容 C 的串联谐振回路中，如果频率小于 LC 的串联谐振频率

$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ ，那么 LC 回路对外显现为容性。我们可以通过回路和等效电容的输入阻抗

相等建立等式，从而求得此回路在频率 f 时的等效电容 C_e 。



$$Z_{in} = j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j\omega C_e}$$

其中， $\omega = 2\pi \cdot f$

$$C_e = \frac{C}{1 - \omega^2 \cdot L_s \cdot C} = \frac{C}{1 - \frac{f^2}{f_r^2}}$$

γ 因子为等效电容 C_e 与原始电容 C 的比值，即 $\gamma_{Lc} = \frac{C_e}{C}$ 。

所以，

$$\gamma_{Lc} = \frac{1}{1 - \left(\frac{f}{f_r}\right)^2}$$

同理在 LC 的并联谐振回路中，如果频率小于谐振频率，回路对外呈现为感性，定义此时的 γ 因子为等效电感与原始电感的比值，我们仍然得到与串联谐振网络相同的 γ 因子。

显然， $\gamma_{Lc} \geq 1$ ，且随着频率 f 的增加， γ_{Lc} 是单调递增的。 $f=0$ ，其值为 1；在 $f=f_r$ ，

其值达到无穷。网络的谐振频率是 γ_{LC} 的极点。

4. 传输线的 γ 因子

对于一段长度固定的传输线，对于不同的频率，虽然其电尺寸随频率的改变而改变的，但是由于对于不同频率，其相位速度是固定的。为了推导上的方便，我用这段传输线相位时延 T 来定义这段线的尺寸。这段传输线的相移为：

$$\theta = \omega \cdot T$$

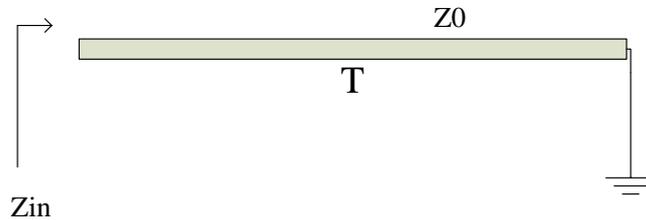
根据传输线的基本理论，特性阻抗为 Z_0 ，相移 θ 的短路线的输入阻抗为

$Z_{in} = j \cdot Z_0 \cdot \text{tg}(\theta)$ ，当 θ 小于 $\frac{\pi}{2}$ ， Z_{in} 为正的纯虚数，所以此网络对外呈现为感性，其等效电感为 $L_e = \frac{Z_{in}}{j\omega} = \frac{Z_0 \cdot \text{tg}(\omega T)}{\omega}$ ，当频率为零对应的电感量为

$$L = \left. \frac{Z_0 \cdot \text{tg}(\omega T)}{\omega} \right|_{\omega=0} = Z_0 \cdot T。$$

定义传输线的 γ 因子： $\gamma_{Line} = \frac{L_e}{L}$ 。所以，

$$\gamma_{Line} = \frac{\text{tg}(\omega T)}{\omega T}$$



当 $\omega T = \frac{\pi}{2}$ 时，其输入阻抗变为无穷大，此时传输线处于谐振状态，其谐振频率为 $f_r = \frac{1}{4T}$ 。

对于开路线，在当 θ 小于 $\frac{\pi}{2}$ 时显现为容性，定义 $\gamma_{Line} = \frac{C_e}{C}$ ，可以得到与短路线相同的公式。

我们可以证明， $\gamma_{Line} \geq 1$ ，且随着频率 f 的增加， γ_{Line} 是单调递增的。 $f = 0$ ，其值为 1；

在 $f = f_r$ ，其值达到无穷。网络的谐振频率是 γ_{Line} 的极点。

5. 三个 γ 因子

至此，我们得到了三个 γ 因子， γ_{Ein} 、 γ_{Lc} 和 γ_{Line} 。

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_{\text{Ein}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \\ \gamma_{Lc} = \frac{1}{1 - \left(\frac{f}{f_r}\right)^2} \\ \gamma_{\text{Line}} = \frac{\text{tg}(2\pi f \cdot T)}{2\pi f \cdot T} \end{array} \right.$$

γ_{Ein} 表征的是物体运动速度较快时与静止时相比，对时间和空间的影响的度量。

γ_{Lc} 表征的是 LC 回路频率较高时与频率为零时相比，其等效电路增强的度量，

γ_{Line} 表征的是传输线频率较高时与频率为零时相比，其等效电路增强的度量，

共同的特点：

1) 极点

极点的位置

$$v = c$$

$$f_{rLC} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

$$f_{rLine} = \frac{1}{4T}$$

2) 曲线

为了便于比较三个 γ 因子的曲线变化趋势，我对三个极点都进行了归一化，归一化后的 γ 因子为，

$$\gamma_{\text{Ein}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \bar{v}^2}}$$

$$\gamma_{Lc} = \frac{1}{1 - \bar{f}^2}$$

$$\gamma_{\text{Line}} = \frac{\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} \cdot \bar{f}\right)}{\frac{\pi}{2} \cdot \bar{f}}$$

其中， \bar{v} 和 \bar{f} 分别为归一化的速度和频率。



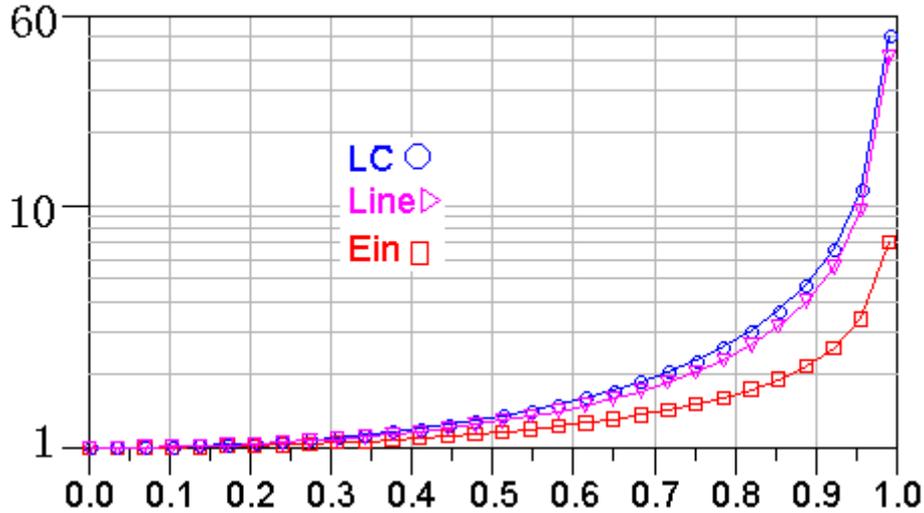


图 三个 γ 因子的曲线

在归一化变量下，三个 γ 因子有如下的不等式，

$$\gamma_{LC} > \gamma_{Line} > \gamma_{Ein}$$

3) 极点的个数

对于一个复杂的微波网络，肯定是一个由许多电感、电容、传输线组成的拓扑结构，那么必定存在很多的谐振点，对于 γ 因子而言，就是所谓的极点。

我们首先来看看前面曾经分析过的短路传输线的极点。由于传输线的电尺寸的周期函数。所以 γ_{Line} 是有无穷多个极点的，前面所给出的极点只是最靠近零点的第一个极点。

$$2\pi f \cdot T = (n + \frac{1}{2})\pi \quad \text{其中, } n=0, 1, 2, \dots$$

$$f = \frac{2n+1}{4T}$$

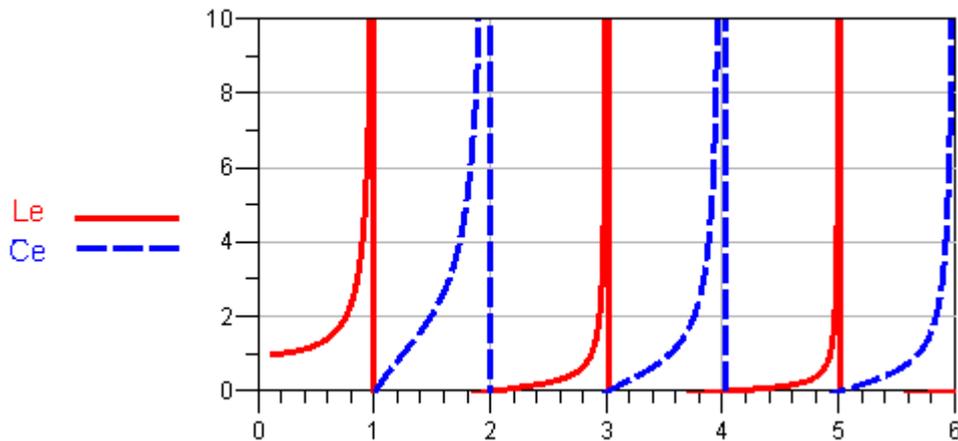


图 传输线的等效电感和等效电容



从图中我们可以看到等效电感和等效电容是交替出现的，这也是符合福斯特电抗定理的。我们对 γ 因子的确定仅限于从零到第一个极点的区域，我称这一个区域叫第一区域，其他任意相邻两个极点之间的区域统称为非第一区域。第一区域与非第一区域有较大的区别。第一区

域为 $(0, 1)$ ，它在 $f=0$ 的值为 1，随着 f 的增加，它的归一化的等效电感值逐渐增大，直至 $f=1$ ，其值变为无穷大，此时我可以说不已经转变为一个容值为零的等效电容。随着频率的组件增加，其容值逐渐增加直至第二个极点 $f=2$ 增加到无穷大，所以说第二个区域，等效值是从零变为无穷大，而第一区域是从 1 变为无穷大。

在 Einstein 的相对论中， γ_{Ein} 因子只有一个极点。

在 LC 的串联和并联的网络中，只有一个极点，但是对于多个电感和电容的复杂拓扑结构，必定存在很多的极点。它的图形与传输线的图形是类似的。

6. γ 因子的应用

1) γ_{Ein} 为我们提供了物体运动速度对时间膨胀的影响量。譬如在行驶速度 $v=360\text{km/h}=100\text{m/s}$ ，得到 $\gamma_{Ein} = 1 + 5.6 \cdot 10^{-14}$ ，这个值非常小，我们可以忽略时间膨胀等效应。

2) γ_{Lc} 可以计算等效电感和等效电容的值。譬如，标值为 33nH 的电感，谐振点为 1540MHz，应用于 500MHz 的电路， $\gamma_{Lc} = 1.118$ ，所以等效电感 $L_{eff} = 36.9\text{nH}$ 。这一点已经用于 LC 中频滤波器的中心频点的分析中，非常实用。

3) γ_{Line} 也为我们度量分布参数的集总参数效应提供了一个比较感性的度量。譬如长为 10mm 的微带短路线，特性阻抗 50 欧姆，相速度 $v_p = \frac{2}{3}c$ ，那么，
 $T = 10\text{mm}/(2 \cdot 10^8) = 50\text{pS}$ ，在低频的等效电感为
 $L = Z_0 \cdot T = 50 \cdot 10\text{mm}/(2 \cdot 10^8) = 2.5\text{nH}$ 。如果工作在 1GHz，
 $\gamma_{Line} = \frac{tg(\omega T)}{\omega T} \Big|_{f=1\text{GHz}, T=50\text{pS}} = 1.034$ ，其等效电感为 2.586nH。

4) γ 因子的递增型和周期性也为我们研究复杂拓扑结构和 γ_{Ein} 提供一些思路，因为这可能是一个较为一般性的规律。也许光速只是我们遇到的第一个极点，也许还有更高的极点等着我们去发现。